

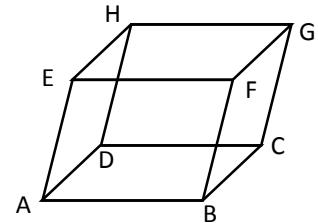
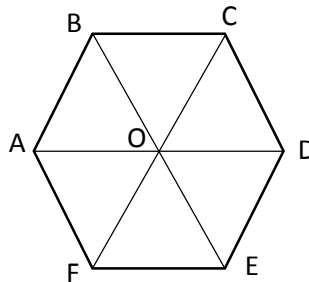
środa, 21 października 2015

- Wyznaczyć  $y$  i  $z$  dla których wektor  $\vec{A} = (2, y, z)$  jest prostopadły do wektorów  $\vec{B} = (-1, 4, 2)$  i  $\vec{C} = (3, -3, -1)$ . Jakie kąty tworzy wektor  $\vec{A}$  z wektorami  $\vec{B} + \vec{C}$  oraz  $\vec{A} - 2\vec{B} + 3\vec{C}$ ?
- Obliczyć objętość równoległościanu wyznaczonego przez wektory  $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ , gdy :

$\vec{A} = (3, -2, -1)$	$\vec{A} = (5, 0, 1)$	$\vec{A} = (4, \frac{1}{2}, 1)$	$\vec{A} = (-3, 2, 1)$	$\vec{A} = (\frac{3}{2}, 2, \frac{1}{2})$
$\vec{B} = (-1, 2, 1)$	$\vec{B} = (2, 2, 2)$	$\vec{B} = (5, 2, 3)$	$\vec{B} = (1, 2, 1)$	$\vec{B} = (1, 2, 1)$
$\vec{C} = (1, 1, 4)$	$\vec{C} = (1, 1, 4)$	$\vec{C} = (2, 2, 4)$	$\vec{C} = (-2, 1, 5)$	$\vec{C} = (-2, 1, 5)$

- Rysunek poniżej przedstawia sześciokąt foremny ABCDEF. Korzystając z oznaczeń jak na rysunku znajdź:

- $\vec{AF} + \vec{BC} =$
- $\frac{1}{2}\vec{AD} + \vec{ED} =$
- $2\vec{FE} - \vec{AF} - \vec{FE} =$
- $\frac{1}{2}(\vec{AD} + \vec{BE}) =$
- $\frac{1}{2}\vec{FC} + \vec{BC} =$
- $-2\vec{ED} - \vec{AF} + \vec{AB} =$



- Rysunek powyżej przedstawia równoległościan ABCDEFGH. Niech:  $\vec{u} = \vec{AB}$ ,  $\vec{w} = \vec{AG}$ ,  $\vec{v} = \vec{AD}$ .

- Wyraź wektory poniższe za pomocą wektorów  $\vec{u}, \vec{v}$  oraz  $\vec{w}$ :

$$\vec{AC}, \vec{HB}, \vec{CE}, \vec{AF}.$$

- Wiedząc, że  $|\vec{AD}| = 3$ ,  $|\vec{AB}| = 4$  i  $|\vec{AC}| = 6$ , znajdź: kąt  $\sphericalangle ABC$  oraz pole powierzchni równoległoboku ABCD.

- Rysunek obok przedstawia cztery równoległoboki.

Niech  $A = (-1, 3)$ ,  $C = (5, 4)$  i  $I = (7, 8)$ .

- Znajdź współrzędne wektora:

$$\vec{AB}, \vec{AE}, \vec{CD},$$

- Wyraź poniższe wektory jako liniową kombinację wektorów jednostkowych (wersorów)

$$\vec{BF}, \vec{CH}, \vec{DG}.$$

- Znajdź wektor położenia punktów B, D, E, F, i G.

- Dane są punkty  $P = (0, 2, -1)$  i  $Q = (2, 1, 1)$ .

- Znajdź współrzędne wektora  $\vec{OP}$  i  $\vec{OQ}$ . Punkt O ma współrzędne  $(0, 0, 0)$ ,

- Wyraź  $\vec{PQ}$  jako liniową kombinację wersorów osi.

- Uprościć wyrażenia:

- $\vec{u} + (\vec{v} + 2\vec{u}) =$

- $(\vec{u} - \vec{v}) + 2(\vec{v} - 2\vec{u}) =$

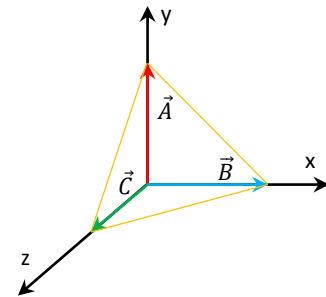
- $3 \left[ \frac{1}{6}(\vec{u} + \vec{v}) + \frac{1}{3}(\vec{v} - \vec{u}) \right] =$

- Rozwiąż równania:

- $2(x\vec{i} + y\vec{j}) - 3(y\vec{i} + x\vec{j}) = 5(\vec{i} - 2\vec{j})$

- $(2\vec{i} + y\vec{j}) - (x\vec{i} + 2\vec{j}) - (\vec{i} + 3\vec{j}) = 0$

- Obliczyć objętość czworościanu przedstawionego na rys. Oblicz powierzchnię pomarańczowego trójkąta.



$\vec{A} = (0, 4, 0)$	$\vec{A} = (0, 5, 0)$	$\vec{A} = (0, \frac{1}{2}, 0)$
$\vec{B} = (4, 0, 0)$	$\vec{B} = (2, 0, 0)$	$\vec{B} = (5, 0, 0)$
$\vec{C} = (0, 0, 2)$	$\vec{C} = (0, 0, 4)$	$\vec{C} = (0, 0, 4)$

10. Wektory  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$  spełniają następujące zależności:  $4\vec{a} - 5\vec{b} \perp 2\vec{a} + \vec{b}$ ,  $7\vec{a} - 2\vec{b} \perp \vec{a} - 4\vec{b}$ . Wyznaczyć kosinus kąta zawartego pomiędzy wektorami  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$ .
11. Dane są dwa wektory, takie że:  $\vec{a} + \vec{b} = 11\hat{x} - \hat{y} + 5\hat{z}$  oraz  $\vec{a} - \vec{b} = -5\hat{x} + 11\hat{y} + 9\hat{z}$ . Znaleźć
- $\vec{a}$  i  $\vec{b}$ ,
  - Długości wektorów  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$ ,
  - $\angle\{\vec{a}, \vec{a} + \vec{b}\}$ .
12. Stałe siły  $\vec{F}_1 = \hat{x} + 2\hat{y} + 3\hat{z}$  i  $\vec{F}_2 = 4\hat{x} - 5\hat{y} - 2\hat{z}$  działają równocześnie na cząstkę w czasie przesunięcia z punktu A=(20, 15, 0) do punktu B=(0, 0, 7). Jaka praca została wykonana przy przesunięciu cząstki?
13. Moment siły  $\vec{M}$  względem danego punktu jest określony wzorem  $\vec{r} \times \vec{F}$ , gdzie  $\vec{r}$  jest wektorem o długości równej odległości tego punktu od punktu przyłożenia siły  $\vec{F}$ . Rozważmy siłę  $\vec{F} = -3\hat{x} + \hat{y} + 5\hat{z}$  działającą na punkt o wektorze położenia  $\vec{r} = \hat{x} + 2\hat{y} + 3\hat{z}$
- Jaki jest moment siły względem punktu (0, 0, 0)? Podać współrzędne wektora momentu siły.
  - Jaki jest wektor momentu siły względem punktu (0, 10, 0)?
14. Oblicz powierzchnię równoległoboku wyznaczonego przez wektory  $\vec{A} = 2\hat{x} + 4\hat{y}$  oraz  $\vec{B} = 4\hat{x} + 2\hat{y}$ . Narysuj oba wektory oraz równoległobok.
15. Obliczyć miarę kąta pomiędzy wektorami  $\vec{C} = (2, 4, 6)$  i  $\vec{D} = (-2, -4, 1)$ . Obliczyć ich iloczyn skalarny i wektorowy. Obliczyć objętość równoległościanu rozpiętego na trzech wektorach:  $\vec{A}$ ,  $\vec{C}$  oraz  $\vec{D}$ . Współrzędne wektora  $\vec{A} = -\vec{i} + 2\vec{j}$ .
16. 2. Położenie punktu materialnego zmienia się w czasie zgodnie z następującą funkcją:
- $x(t) = 3e^{-2t} + t$ ,
  - $x(t) = A \sin(\omega t)$ , gdzie A,  $\omega$  – stałe dodatnie.
- Wyznaczyć funkcje v(t) oraz a(t) oraz obliczyć wartości początkowe prędkości i przyspieszenia.
17. Położenie punktu materialnego zmienia się w czasie zgodnie z następującą funkcją:  $x(t) = -\frac{1}{2}t^2 + \frac{3}{4}t$ . Narysować przebieg położenia, prędkości i przyspieszenia w funkcji czasu.
18. Przyspieszenie punktu zmienia się w czasie zgodnie z funkcją:
- $a(t) = 2t^3$ ,
  - $a(t) = e^{2t} + 1$ .
- Wyznaczyć prędkość i położenie w funkcji czasu. Warunki początkowe:  $v(0) = 0$ ,  $x(0) = 1$ .
19. Obliczyć iloczyn skalarny  $\vec{A} \cdot \vec{B}$  oraz wektorowy  $\vec{A} \times \vec{B}$  wektorów:  $\vec{A} = (1, 2, 3)$  i  $\vec{B} = (-3, 1, 2)$ . Obliczyć sumę  $\vec{A} + \vec{B}$  oraz różnicę  $\vec{A} - \vec{B}$  oraz długości wektorów  $\vec{A}$  i  $\vec{A} + \vec{B}$ .
20. Obliczyć miarę kąta pomiędzy wektorami  $\vec{E} = (2, -4, 6)$  i  $\vec{F} = (-2, 4, 1)$ . Obliczyć objętość równoległościanu rozpiętego na trzech wektorach:  $\vec{E}$ ,  $\vec{F}$  oraz  $\vec{C}$ . Współrzędne wektora  $\vec{C} = \vec{j} - 2\vec{k}$ .
21. Położenie punktu materialnego zmienia się w czasie zgodnie z następującą funkcją:
- $x(t) = -2e^{-3t} - t$ ,
  - $x(t) = k \sin(\omega t)$ , gdzie k,  $\omega$  – stałe dodatnie.
- Wyznaczyć funkcje v(t) oraz a(t) oraz obliczyć wartości początkowe prędkości i przyspieszenia.
22. Położenie punktu materialnego zmienia się w czasie zgodnie z następującą funkcją:  $x(t) = \frac{1}{2}t^2 - \frac{3}{4}t$ . Narysować przebieg położenia, prędkości i przyspieszenia w funkcji czasu.
23. Przyspieszenie punktu zmienia się w czasie zgodnie z funkcją:
- $a(t) = 3t^2$ ,
  - $a(t) = \sin 2t + 1$ .
- Wyznaczyć prędkość i położenie w funkcji czasu. Warunki początkowe:  $v(0) = 0$ ,  $x(0) = 1$ .
24. Obliczyć iloczyn skalarny  $\vec{A} \cdot \vec{B}$  oraz wektorowy  $\vec{B} \times \vec{A}$  wektorów:  $\vec{A} = (1, -2, 3)$  i  $\vec{B} = (3, -1, 2)$ . Obliczyć sumę  $\vec{A} + \vec{B}$  oraz różnicę  $\vec{B} - \vec{A}$  oraz długości wektorów  $\vec{B}$  i  $\vec{A} - \vec{B}$ .

## ODPOWIEDZI:

1. Odp.:  $y=5$ ;  $z=-9$ ;  $\alpha=90^\circ$ ;  $\cos\alpha\{\vec{A}, (\vec{A} - 2\vec{B} + 3\vec{C})\} = \sqrt{\frac{110}{569}}$ .
2.  $V=14$ ;  $V=30$ ;  $V=7$ ;  $V=|-36|=36$ ;  $V=2$ .
3. a)  $\vec{AE}$ ; b)  $\vec{AC}$ ; c)  $\vec{ED}$ ; d)  $\vec{AE}$ ; e)  $\vec{AC}$ ; f)  $\vec{CB}$ .
4.  $\vec{AC} = \vec{u} + \vec{v}$ ,  $\vec{HB} = 2\vec{v} + \vec{w}$ ,  $\vec{CE} = \vec{w} - 2\vec{v} - 2\vec{u}$ ,  $\vec{AF} = \vec{w} - \vec{v}$ .
5. a)  $\vec{AB} = \frac{1}{2}\vec{AC} = 3\vec{i} + \vec{j} \rightarrow (3, 1)$ ,  $\vec{AE} = \frac{1}{2}\vec{AI} = 4\vec{i} + \frac{5}{2}\vec{j}$ ,  $\vec{CD} = \frac{1}{2}\vec{CI} = \vec{i} + 2\vec{j}$ .  
b)  $\vec{AB} = 2\vec{i} + 4\vec{j}$ .  
c) wektor położenia B:  $\vec{r}_B = (3, \frac{7}{2})$ .
6. a)  $\vec{OP} = 2\vec{j} - \vec{k} \rightarrow (0, 2, -1)$ ,  $\vec{OQ} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} \rightarrow (2, 2, 1)$   
b)  $\vec{PQ} = \vec{OQ} - \vec{OP} = -2\vec{i} - 2\vec{k}$ .
7. a)  $\vec{u} + (\vec{v} + 2\vec{u}) = \vec{v} + 3\vec{u}$ , b)  $(\vec{u} - \vec{v}) + 2(\vec{v} - 2\vec{u}) = \vec{v} - \vec{u}$ , c)  $3\left[\frac{1}{6}(\vec{u} + \vec{v}) + \frac{1}{3}(\vec{v} - \vec{u})\right] = \frac{3}{2}\vec{v} - \frac{1}{2}\vec{u}$ .
8. a)  $x=4, y=1$ ; b)  $x=1, y=5$ .
9.  $V = \frac{1}{3}|-32| = \frac{32}{3}$ ,  $V = \frac{1}{3}|-40| = \frac{40}{3}$ ,  $V = \frac{1}{3}|-10| = \frac{10}{3}$ .
10.  $\cos\alpha\{\vec{a}, \vec{b}\} = \frac{1}{2}$ .
11. a)  $\vec{a} = 3\hat{x} + 5\hat{y} + 7\hat{z}$ ,  $\vec{b} = 8\hat{x} - 6\hat{y} - 2\hat{z}$ , b)  $|\vec{a}| = \sqrt{83}$ ,  $|\vec{b}| = \sqrt{104}$ , c)  $\cos\alpha\{\vec{a}, \vec{a} + \vec{b}\} = \frac{63}{\sqrt{83 \cdot 147}}$ .
12.  $W = (\vec{F}_1 + \vec{F}_2) \cdot \vec{r} = 48$ .
13. a)  $14\hat{x} - 38\hat{y} + 16\hat{z}$ , b)  $36\hat{x} - 38\hat{y} - 14\hat{z}$ .
14.  $P = 12 \text{ cm}^2$ .
15.  $\vec{C} \cdot \vec{D} = -14$ ;  $\vec{C} \times \vec{D} = (-28, -14, 0)$ ;  $\cos\alpha\{\vec{C}, \vec{B}\} = \frac{-\sqrt{6}}{12}$ ;  $V = 0$ .
16. a)  $v(t) = -6e^{-2t} + 1$ ,  $a(t) = 12e^{-2t}$ ,  $v(0) = -5$ ,  $a(0) = 12$ ; b)  $v(t) = A\omega\cos\omega t$ ,  $a(t) = -A\omega^2\sin\omega t$ ,  $v(0) = A\omega$ ,  $a(0) = 0$ .
17.  $v(t) = -t + \frac{3}{4}$ ,  $a(t) = -1$ .
18. a)  $v(t) = \frac{1}{2}t^4$ ,  $x(t) = \frac{1}{10}t^5 + 1$ ; b)  $v(t) = \frac{1}{2}e^{2t} + t - \frac{1}{2}$ ,  $x(t) = \frac{1}{4}e^{2t} + \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{3}{4}$ .
19.  $\vec{A} \cdot \vec{B} = 5$ ;  $\vec{A} \times \vec{B} = (-1, -11, 7)$ ;  $\vec{A} + \vec{B} = (-2, 3, 5)$ ;  $\vec{A} - \vec{B} = (4, 1, 1)$ ;  $|\vec{A}| = \sqrt{14} = 3.74$ ;  $|\vec{A} + \vec{B}| = \sqrt{38} = 6.16$ .
20.  $\vec{E} \cdot \vec{F} = -14$ ;  $|\vec{E}| = \sqrt{56}$ ;  $|\vec{F}| = \sqrt{21}$ ;  $\cos\alpha\{\vec{E}, \vec{F}\} = \frac{-14}{\sqrt{56 \cdot 21}}$ ;  $V = |-14| = 14$ .
21. a)  $v(t) = 6e^{-3t} - 1$ ,  $a(t) = -18e^{-3t}$ ,  $v(0) = 5$ ,  $a(0) = -18$ ; b)  $v(t) = k\omega\cos\omega t$ ,  $a(t) = -k\omega^2\sin\omega t$ ,  $v(0) = k\omega$ ,  $a(0) = 0$ .
22.  $v(t) = t - \frac{3}{4}$ ,  $a(t) = 1$ .
23. a)  $v(t) = t^3$ ,  $x(t) = \frac{1}{4}t^4 + 1$ ; b)  $v(t) = -\frac{1}{2}\cos 2t + t + \frac{1}{2}$ ,  $x(t) = -\frac{1}{4}\sin 2t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t + 1$ .
24.  $\vec{A} \cdot \vec{B} = 11$ ;  $\vec{A} \times \vec{B} = (1, 7, 5)$ ;  $\vec{A} + \vec{B} = (4, -3, 5)$ ;  $\vec{A} - \vec{B} = (-2, -1, 1)$ ;  $|\vec{B}| = \sqrt{14} = 3.74$ ;  $|\vec{A} - \vec{B}| = \sqrt{6}$ .

Kalkulator wektorów:

<http://www.naukowiec.org/kalkulatory/wektory.html>

Kalkulator macierzy (wyznaczników):

<http://www.naukowiec.org/macierz.html>